2.4 柯西定理的最重要的应用——柯西积分公式

柯西积分公式 Cauchy's integral formula

定理 2.3

If f is analytic on G and on its borders ∂G, then

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial G} \frac{f(z)}{z-z_0} dz \tag{2.53}$$

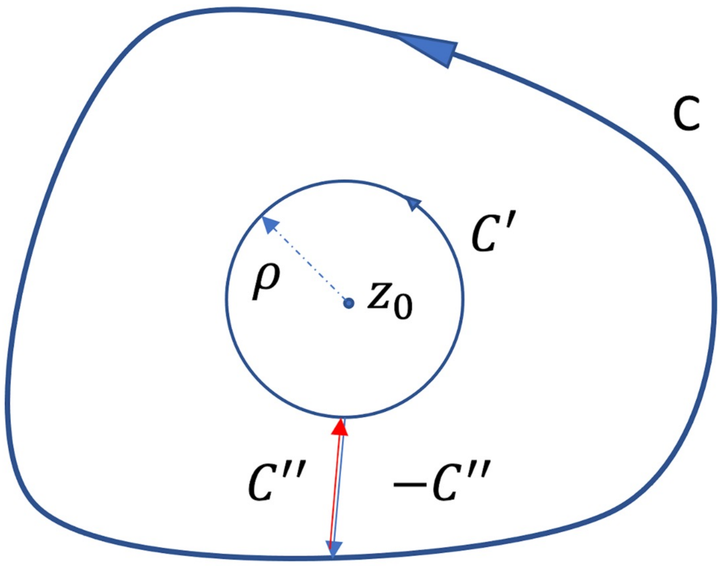

图 2.7: 柯西积分公式证明示意图

证明 如图2.7所示

假定围道 C' 是半径为 ρ, 圆心在点 z_0, 且整个都位于围道 C 内的圆。显然函数 $\frac{f(z)}{z-z_0}$ 在两围道之间的环内解析。将此环沿着连结 C 和 C' 的曲线 C'' 剪开, 根据单连通的柯西定理

$$\oint = \oint_C + \oint_{C''} - \oint_{C'} - \oint_{C''} = 0$$

上式中积分取沿着箭头的方向为正向。

因此 (也可以直接用上面给出的多连通柯西定理直接写出下面的表达式[8])

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \oint_{C'} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

[8]可以不加证明的推广到复连通区域的柯西定理 (证明思路大致和下面的柯西公式的推导的前半部分类似)

定理 2.4

若 $f(z)$ 在闭复通区域 $\bar{D}$ 解析, 则 $f(z)$ 沿所有内、外边界线 $(L=L_0+\sum_k L_k)$ 正方向积分之和为零

$$\oint_L f(z)\mathrm{d}z = \oint_{L_0} f(z)\mathrm{d}z + \sum_k \oint_{L_k} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

"正方向" 是指, 当沿内、外边界线环行时, $\bar{D}$ 保持在左边. 换句话说, 外边界线取逆时针方向, 内边界线取顺时针方向. 作为约定, 今后积分号中

引进变量代换

$$z = z_0 + \rho e^{i\theta}, \quad dz = i\rho e^{i\theta} d\theta$$

则等式右边部分就变成下面的形式:

$$\begin{aligned}\oint \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\theta} f\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right)}{\rho e^{i\theta}} d\theta = \\ = i \int_0^{2x} f\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right) d\theta\end{aligned}$$

函数 $f\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right)$ 可表示成

$$f\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right) = f\left(z_0\right) + \Delta f\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right)$$

$$f'(z_0) = lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}$$

根据函数 $f(z)$ 的解析性, 增量 $\Delta f(z)$ 当 $\triangle z \to 0$ 时趋向于零。因此得

$$i \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right) d\theta = 2\pi i f\left(z_0\right) + i \int_0^{2\pi} \Delta f d\theta$$

因为此式对趋向于零的任意 ρ 都成立, 定理证毕。

柯西积分公式, 它使在区域内部点上的函数值与在包围此区域的围道上的函数值联系了起来 (此围道必须在函数解析区域内)。

利用已求得的解析函数的积分表示式, 就可计算它在点 z_0 处的导数。为此, 设

$$\begin{aligned}f\left(z_0 + \xi\right) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z) dz}{z - z_0 - \xi} \\ f\left(z_0\right) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z) dz}{z - z_0}\end{aligned}$$

(点 $z_0 + \xi$ 和 z_0 都位于围道 C 内部)。作差

$$f\left(z_0 + \xi\right) - f\left(z_0\right) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\xi f(z) dz}{\left(z - z_0 - \xi\right)\left(z - z_0\right)}$$

根据函数 $f(z)$ 的解析性条件, 而 $z - z_0 \neq 0$, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{\xi \to 0} \frac{f\left(z_0 + \xi\right) - f\left(z_0\right)}{\xi} = \left.\frac{df}{dz}\right|_{z = z_0} = \\ f'\left(z_0\right) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z) dz}{\left(z - z_0\right)^2}\end{aligned}$$

在解析函数的定义中, 我们只假定它存在一阶导数, 但显然, 如果第 n 阶导数确定了, 就能构造出第 $n+1$ 阶导数。于是解析函数任意阶导数都存在, 而且可以借助柯西积分公式得到。例如, $f(z)$ 的二阶导数等于

$$\begin{aligned}f''\left(z_0\right) = \lim_{\xi \to 0} \frac{f'\left(z_0 + \xi\right) - f'\left(z_0\right)}{\xi} = \\ = \frac{2}{2\pi i} \oint \frac{f(z) dz}{\left(z - z_0\right)^3}\end{aligned}$$

定理 2.5

而对第 n 阶导数得到柯西积分推广公式

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

这样，我们得到了复变函数相对实变函数独有的性质，即解析函数的绝妙性质：在给定点上解析的函数可微分无限多次。可微则无穷可微。从实用的角度看：柯西积分（推广）公式把积分转化成点值

例题 2.12 In summary, we find that if Γ is any positively-oriented loop in the complex plane and z_0 a point not in Γ, then

$$\int_C\frac{1}{z-z_0}dz=\begin{cases}2\pi i & \text{for } z_0 \text{ in the interior of } C;\ \text{and}\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

例题 2.13 利用柯西积分（推广）公式把积分转化成点值的例子：

$$I=\oint_{|z-1|=1}\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{(z^2-1)^2}dz.$$

解

$$I=\oint_{|z-1|=1}\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{(z^2-1)^2}dz=\oint_{|z-1|=1}\frac{f(z)}{(z-1)^2}dz=2\pi i f'(z=1)=2\pi i\frac{\sqrt{2}}{8}(\frac{\pi}{4}-1)$$

其中解析函数

$$f(z)=\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{(z+1)^2}$$

注意 回顾解析函数的定义：若函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处可导，则称 $f(z)$ 为 D 内的解析函数.

若函数 $f(z)$ 在 z_0 点的邻域 $(|z-z_0|<\varepsilon)$ 处处可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 点解析，它比" $f(z)$ 在 z_0 点可导” 要求为高 (参看下面的例题).

函数的解析性，总是和一定的区域联系在一起的. 有时也称函数在 z_0 点解析，这应理解为存在 z_0 点的一个邻域，函数在 z_0 点以及 z_0 的这个邻域内处处可导.

Cauchy-Riemann 方程，简称 C-R 方程。C-R 方程为 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处可微或者可导的必要条件，但并不是充分条件。

例题 2.14

$$f(z)=f(x+iy)=\begin{cases}\frac{\bar{z}^2}{z} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$$

在 $z=0$ 处，$f(z)$ 满足 C-R 方程，但不可微，因为取 $x=my$

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\frac{f(z)}{z}=\frac{\bar{z}^2}{z^2}=\frac{m^4-4m^3i-6m^2-4mi+1}{m^4+2m^2+1},$$

令 $z\to 0$ 其极限不唯一

定理 2.6

函数 $f(z)$ 在区域 Ω 内解析或者全纯的充要条件是：u,v 在 Ω 内有一阶连续偏导数，且满足 C-R 方程。

例题 2.15 函数 $f(z)=|z|^2$ 在 $z=0$ 点是否可导？是否解析？

解 由 $f(z)=|z|^2=x^2+y^2$，得 $u=x^2+y^2, v=0$，由此得

$$u_x=2x,\quad u_y=2y,\quad v_x=0,\quad v_y=0$$

即 u,v 在 $z=0$ 点可微且满足 $\mathrm{C-R}$ 条件，可见 $f(z)$ 仅于 $z=0$ 点可导. 因为 $f(z)$ 在 $z=0$ 的邻域除 $z=0$ 点外均不可导，故 $f(z)$ 在 $z=0$ 不解析.

若函数 $f(z)$ 在某点 a 没有定义，或者在 a 点不解析，则称 a 点为 $f(z)$ 的奇点. 例如，$z=a$ 就是函数 $f(z)=\frac{1}{z-a}$ 的奇点.

$z=a$ 就是函数 $f(z)=\frac{1}{(z-a)^n}$ 的 n 阶奇点。

有了这样对于奇点的初步定义，我们可以把柯西定理和柯西积分公式总结为：1. 积分围道内部，若被积函数没有奇点，则由柯西定理知积分为 0(例如菲涅尔积分)；2. 若被积函数在围道内部有 $n+1$ 阶奇点，则由推广的柯西积分公式知积分的结果为奇点处的 n 阶导数值(例如上面的例题)。

如果要讨论函数 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 点是否解析，则需作变换 $z=1/t$，然后讨论函数 $f(1/t)$ 在 $t=0$ 点是否解析.

函数的解析性，对函数是一个高要求，这表现为解析函数具有一系列的重要性质. 讨论解析函数的各种特殊性质，就是复变函数论的中心课题.

例题 2.16 物理中常见的 Dirichlet 积分[9]

$$I=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \tag{2.54}$$

解 构造辅助函数

$$F(z)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}$$

构造积分路径如图所示.

具体计算细节下节课计算

思考题

1. 函数 $f(z)=x^2+y+i\left(y^2-x\right)$ 在直线 $y=x$ 上可导，但处处不解析。
2. 函数

$$f(z)=\begin{cases}\exp\left(-\frac{1}{z^4}\right) & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$$

处处满足柯西-黎曼方程但在 $z=0$ 处不解析。

[9]本课程中，我们将学会 6 中以上的方法来得到这积分。多试试从不同方法算这个积分，就能够把本课程一半的知识点串起来了。本学期结束时希望同学们能集齐七颗龙珠（七种方法）。

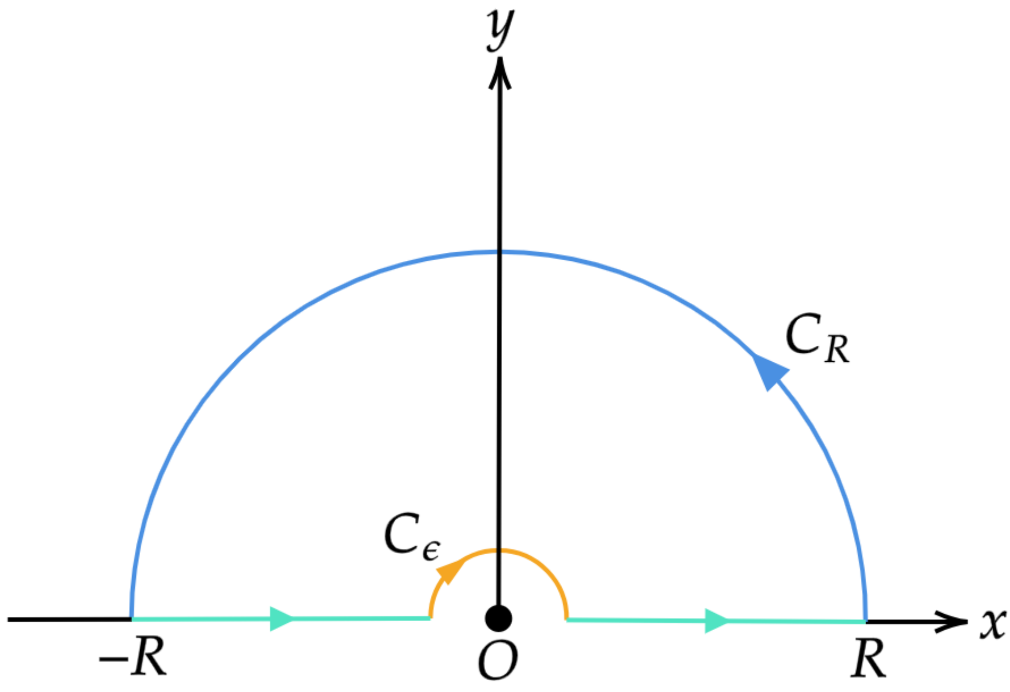

图 2.8: $sinz/z$ 积分围道

3. 由于复解析函数的导数与方向无关, 因此可以写为

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = -iu_y(x,y) + v_y(x,y).$$

因此又可以写作

$$f'(z) = \frac{1}{2}(u_x - iu_y) + \frac{i}{2}(v_x - iv_y) = \frac{\partial f(z)}{\partial z},$$

即复解析函数的导数计算可以直接利用单变量微积分中的微分规则求解。

4. 函数

$$f(x+iy) = -4xy + 2i\left(x^2 - y^2 + 3\right)$$

是否是解析函数? 如是请给出其解析区域。

5. 函数

$$g(x+iy) = \begin{cases} \frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4} & \text{for } z \neq 0 \\ 0 & \text{for } z = 0 \end{cases}$$

在 $z=0$ 处是否解析? 请给出理由。

学而时习之

1. 已经解析函数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 的实部或者虚部，求此解析函数的完整表达式

(1) 如果已知虚部

$$v(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} \tag{2.55}$$

(2) 如果已知实部

$$u(x,y) = e^{-y}\sin x \tag{2.56}$$

2. 直角坐标系中解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的实部与虚部之和如下，求此解析函数的完整表达式

$$u\left(x,y\right)+v\left(x,y\right)=-\left(x+y\right)\left(x^2-4xy+y^2\right) \tag{2.57}$$

3. 计算如下围道积分

$$\oint_{|z|=0.01}\frac{1}{z^2-1}dz \tag{2.58}$$

4.
$$\oint_{|z|=10}\frac{1}{z^2-1}dz \tag{2.59}$$

课程预告

- 通过更多的例子，更加深入的讲解复变函数可导和解析的条件（柯西-黎曼条件）及其最重要的应用——得到复变函数的核心，即柯西定理。然后是柯西定理的应用。对应教材上 3.1 3.2.3.3,3.4,3.5 节
- 课前十分钟四位同学到黑板上不看讲义计算，如果有同学觉得例题简单的话，可以做一道上面的习题代替我指定的例题——
  冯嘉敏：基于柯西定理证明柯西积分公式
  侯庆宇：基于柯西积分公式推导出柯西积分推广公式，即 n 阶导数的公式
  胡洪洋：计算
  $$I=\oint_{|z-1|=1}\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{(z^2-1)^2}dz.$$
  胡庆林：计算
  $$I=\oint_{|z-1|=1}\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{(z^2-1)^2}dz.$$