### 1.4.7 函数的卷积及其傅立叶变换

**定理 1.1**

卷积定理：函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的卷积定义为

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) \mathrm{d}\xi$$

$f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 卷积的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[f_1(x) * f_2(x)] = \mathcal{F}[f_1(x)]\,\mathcal{F}[f_2(x)] = \widetilde{f_1}(k)\tilde{f_2}(k)$$

♡

**例题 1.12** Let us solve

$$-u'' + u = f(x), \qquad \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0.$$

**解** 将上面方程的两边做傅立叶变换

$$k^2\widetilde{u}(k) + \widetilde{u}(k) = \widetilde{f}(k).$$

变成普通的代数运算了

$$\widetilde{u}(k) = \frac{\widetilde{f}(k)}{1+k^2}.$$

这样我们就得到求解的方程的解的傅立叶变换的表示了，核心问题已经解决了。

剩下就是如何简单进行傅立叶逆变换得到 $u(x)$。

首先我们观察发现 $\widetilde{u}(k)$ 是已知原函数的傅立叶变换的乘积

前面的习题已经证明

$e^{-|x|}$ 的傅立叶变换为 $\frac{2}{k^2+1}$

于是可以利用傅立叶变换的卷积性质

$$u(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} f(y) dy.$$

对于解微分方程的题，得到这样的积分表达式就可以了。只有题目是专门让求积分的题才需要你必须积分出来。

课外拓展知识[10]

### 1.4.8 高维傅立叶变换

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^N\mathbf{r} \\
f(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int \widetilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^N\mathbf{k}
\end{aligned} \tag{1.84}$$

[10] This is exactly what we get from a Green's function representation, where $G(x,y) = e^{-|x-y|}/2$. There is one mystery remaining: the far field condition does not seem to be used anywhere. In fact, condition is already built into the Fourier transform; if the functions being transformed did not decay at infinity, the Fourier integral would only be defined as a distribution).

或者

$$\widetilde{f}(\mathbf{k}) = \int f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^N\mathbf{r}$$
$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int \widetilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^N\mathbf{k} \tag{1.85}$$

正和逆傅立叶变换的系数可以任意组合，但是要保证二者的系数相乘为

$$\frac{1}{(2\pi)^N}$$

### 1.4.9 Dirac Delta 函数及其傅立叶变换

Physics motivation: point particle model is the most useful model in physics. For point particle model, the density (such as charge density) is infinite at the point. The density integration over some space is a given number. To properly describe the point particle, Dirac proposed the famous Delta function, which is very useful in physics.

**定义 1.1**

Dirac Delta function:

$$\delta(x-x_0) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ \infty, & x = x_0 \end{cases} \tag{1.86}$$

and

$$\int_a^b \delta(x-x_0)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 1, & x_0 \in (a,b) \\ 0, & x_0 \notin (a,b) \end{cases} \tag{1.87}$$

♣

The basic property of Delta function is

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0) \tag{1.88}$$

Proof:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0) \tag{1.89}$$

**重要公式 1.3**

$$\widetilde{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = 1 \tag{1.90}$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \tag{1.91}$$

♠

但是学有余力的同学可以学会下面点源的方程的解

**例题 1.13**

$$(m^2 - \nabla^2)\phi(\vec{r}-\vec{r}_0) = \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \tag{1.92}$$

此方程表示三维空间点粒子满足的方程。

对应方程的解叫做点源解

点源解极其重要，所以专门给他一个专门的名字和符号

$$(m^2-\nabla^2)G(\vec{r},\vec{r}_0)=\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \tag{1.93}$$

**解**

两边做傅立叶变换

$$\left(m^2+k^2\right)\tilde{G}(k)=1,$$

$$\tilde{G}(k)=\frac{1}{m^2+k^2},$$

with the function we're looking for given by the inversion formula

$$G(\vec{r},\vec{r}_0)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}d^3ke^{ik\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)}\tilde{G}(k).$$

$$G(\vec{r},\vec{r}_0)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{e^{ik\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)}}{k^2+m^2}d^3k \tag{1.94}$$

$$\begin{aligned}&d^3k=k^2dk\sin\theta d\theta d\varphi,\\&k\in(0,\infty)\quad\theta\in[0,\pi],\quad\varphi\in[0,2\pi]\end{aligned} \tag{1.95}$$

在第八次讲义中，我们详细推导了用围道积分（留数定理）得到了本讲义后面附上了详细的积分过程。

$$G(\vec{r},\vec{r}_0)=\frac{e^{-m|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|} \tag{1.96}$$

当然

$$\phi(\vec{r}-\vec{r}_0)=\frac{e^{-m|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|} \tag{1.97}$$

具体积分的细节又彭想同学提供 latex

$$\begin{aligned}G(\vec{r},\vec{r'})&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{k^2+m^2}e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r'})}\\
&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dk\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi k^2\sin\theta\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r'}|\cos\theta}}{k^2+m^2}\\
&=\frac{2\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dk\int_1^{-1}d(-\cos\theta)\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r'}|\cos\theta}}{k^2+m^2}k^2\\
&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dk\int_{-1}^{1}d(\cos\theta)\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r'}|\cos\theta}}{k^2+m^2}k^2\\
&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dk\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r'}|}-e^{-ik|\vec{r}-\vec{r'}|}}{(k^2+m^2)(ik|\vec{r}-\vec{r'}|)}k^2\\
&=\frac{1}{4\pi^2i|\vec{r}-\vec{r'}|}\int_0^\infty dk\frac{k}{k^2+m^2}[e^{ik|\vec{r}-\vec{r'}|}-e^{-ik|\vec{r}-\vec{r'}|}]\end{aligned}$$

对后面的积分要利用被积函数的奇偶性化简

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty dk\frac{k}{k^2+m^2}[e^{ik|\vec{r}-\vec{r'}|}-e^{-ik|\vec{r}-\vec{r'}|}]\\
=&\int_0^\infty dk\frac{k}{k^2+m^2}e^{ik|\vec{r}-\vec{r'}|}-\int_0^\infty dk\frac{k}{k^2+m^2}e^{-ik|\vec{r}-\vec{r'}|}\\
=&\int_0^\infty dk\frac{k}{k^2+m^2}e^{ik|\vec{r}-\vec{r'}|}+\int_{-\infty}^0 dk\frac{k}{k^2+m^2}e^{ik|\vec{r}-\vec{r'}|}\\
=&\int_{-\infty}^\infty dk\frac{k}{k^2+m^2}e^{ik|\vec{r}-\vec{r'}|}
\end{aligned}$$

故而 $G(\vec{r},\vec{r'})=\frac{1}{4\pi^2 i|\vec{r}-\vec{r'}|}\int_{-\infty}^\infty dk\frac{k}{k^2+m^2}e^{ik|\vec{r}-\vec{r'}|}$

构造一个以 R 为半径的半圆，其中包含奇点 $im$，有留数定理

$$\begin{aligned}
&\int_{-R}^R dk\frac{k}{k^2+m^2}e^{ik|\vec{r}-\vec{r'}|}+\int_{\Gamma_R} dz\frac{z}{z^2+m^2}e^{iz|\vec{r}-\vec{r'}|}\\
=&2\pi i res(im)=2\pi i\frac{ime^{-m|\vec{r}-\vec{r'}|}}{2im}=i\pi e^{-m|\vec{r}-\vec{r'}|}
\end{aligned}$$

由 *Jordan Lemma* 引理，在 $R\to\infty$ 时 $\int_{\Gamma_R}dz\frac{z}{z^2+m^2}e^{iz|\vec{r}-\vec{r'}|}=0$，

这是由于 $z\to\infty$ $\frac{z}{z^2+m^2}\to 0$，所以有

$$\int_{-\infty}^\infty dk\frac{k}{k^2+m^2}e^{ik|\vec{r}-\vec{r'}|}=i\pi e^{-m|\vec{r}-\vec{r'}|}$$

$$\Longrightarrow G(\vec{r},\vec{r'})=\frac{1}{4\pi^2 i|\vec{r}-\vec{r'}|}i\pi e^{-m|\vec{r}-\vec{r'}|}$$

$$\Longrightarrow G(\vec{r},\vec{r'})=\frac{e^{-m|\vec{r}-\vec{r'}|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r'}|}$$

## 思考题

1. 现在基本可以用傅立叶变换的方法解折射率的方程了设人射波的电场强度 $\vec{E}=\vec{E}_0e^{-i\omega t}$，振子的固有频率为 $\omega_0$，而 $\gamma$ 表征唯象阻尼力，则电子的运动方程为

$$\ddot{\vec{r}}+\gamma\dot{\vec{r}}+\omega_0^2\vec{r}=\frac{e}{m}\vec{E}.$$

## 学而时习之

1. Find the Fourier transformation (1) 三维空间的 yukawa potential

$$V(r)=\frac{e^{-mr}}{4\pi r} \tag{1.98}$$

(2)

$$f(x)=xe^{-x^2} \tag{1.99}$$

2. 求福利叶逆变换，即其傅立叶变换前的原函数

$$\frac{2e^{-\sigma^2k^2/2}}{k^2+1} \tag{1.100}$$

3. 利用傅立叶变换解方程

$$-u'' + u = \delta(x), \quad \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0.$$

4. 总结至少 4 种常见的傅立叶变换公式，例如 Gaussian
5. 证明：（1）函数 $f(z) = 2y + ix$ 在复平面上处处不可导
   （2）证明函数 $f(z) = 1/(1-z)$ 除了在 $z = 1$ 处以外，处处解析

**下周预告**

- □ 傅立叶变换和 $\delta$ 函数复习和进阶讨论，格林函数方法简介（不要求）
- □ 课前十分钟四位同学到黑板上不看讲义计算，如果有同学觉得例题简单的话，可以做一道上面的习题代替我指定的例题——

王若宇，王伊煜：解方程

$$-u'' + u = f(x), \quad \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0.$$

王艺兴，王墉：计算

$$(m^2 - \nabla^2)G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

## 课外阅读

格林函数方法——一般了解即可

基本思想：要求一般有源的非齐次微分方程，先求出点源解即格林函数，然后乘上源函数积分即可得到非齐次方程的解。

鉴于课后同学们的反馈和问题，我们不再采用算符语言和一般性推导，完全以一个具体的例子来演示这个方法。

**例题 1.14** 代表性非齐次方程的求解

$$(m^2 - \nabla^2)\phi(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \tag{1.101}$$

Step I：先求点源解

$$(m^2 - \nabla^2)G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{e^{-m|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|} \tag{1.102}$$

Step II：然后乘上源函数积分即可得到非齐次方程的解。

推导：

$$(m^2 - \nabla^2)\phi(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) = \int d\vec{r}_0^3 \rho(\vec{r}_0)\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \int d\vec{r}_0^3 \rho(\vec{r}_0)(m^2 - \nabla^2)G(\vec{r}, \vec{r}_0)$$

上式的 $m^2 - \nabla^2$ 可以移到积分号外，则

$$(m^2 - \nabla^2)\phi(\vec{r}) = (m^2 - \nabla^2)\int d\vec{r}_0^3 \rho(\vec{r}_0)G(\vec{r}, \vec{r}_0)$$

比较两边可得到

$$\phi(\vec{r}) = \int d\vec{r}_0^3 \rho(\vec{r}_0) G\left(\vec{r}, \vec{r}_0\right)$$

带入点源解，即格林函数可得

$$\phi(\vec{r}) = \int d\vec{r}_0^3 \rho(\vec{r}_0) \frac{e^{-m|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|}$$

有兴趣有时间学习更一般的格林函数方法，请单独找我要相关讲义